Inflessione nelle travi

1 Caso della trave incastrata ad un'estremità

Data la trave a mensola AB di lunghezza l, sottoposta all'azione del carico concentrato F applicato all'estremo libero B, questa risulta sollecitata, in ogni sezione, da un momento flettente Mf_x, il cui valore lo si ricava dal diagramma dei momenti riportato sotto la trave AB; l'andamento del diagramma del *Mf* è: lineare, monotono, decrescente.

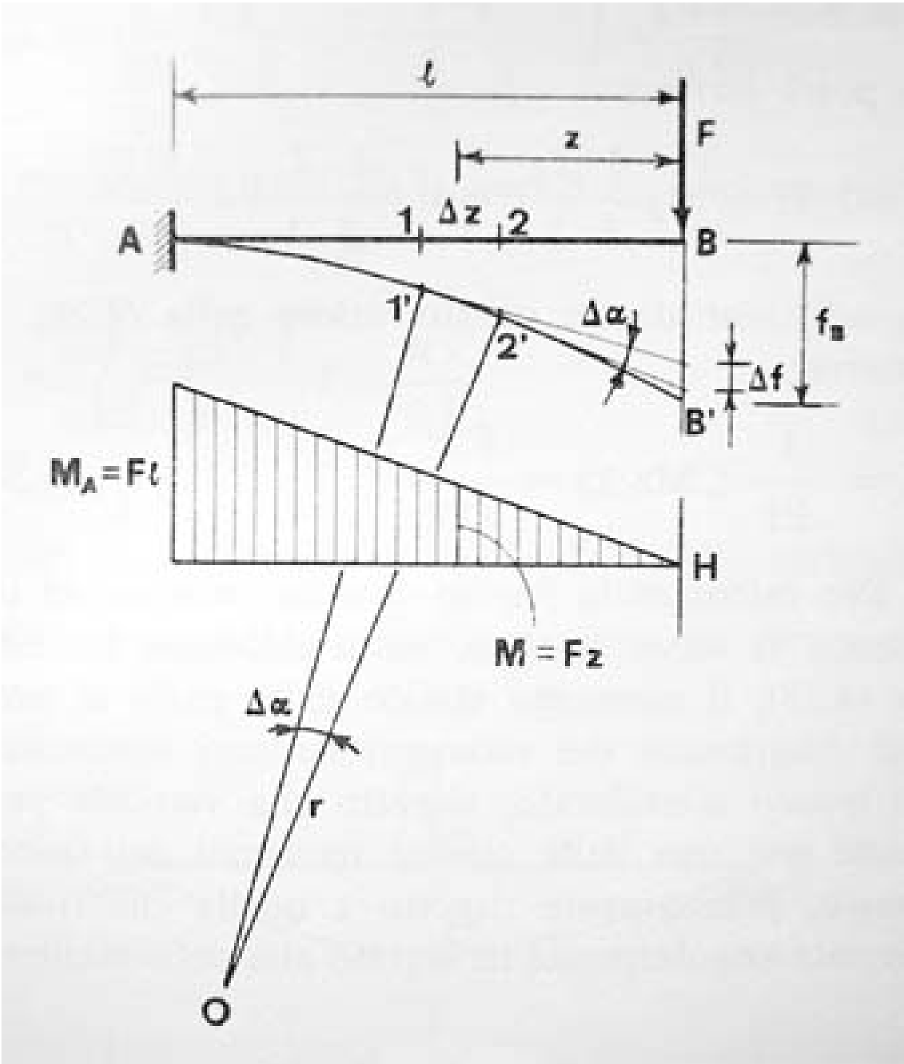

Fig. 1

Si consideri il tronco di trave avente lunghezza *Δz* delimitato dalle sezioni 1 e 2, rispettivamente poste a $z + \frac{\Delta z}{2}$ e $z - \frac{\Delta z}{2}$ dall'estremo libero B; si può assumere, con sufficiente approssimazione (vedere concetto di infinitesimo in matematica), quale *Mf* agente in entrambe le sezioni suddette, il valore medio delle due ordinate del diagramma dei momenti sottostanti alle sezioni 1 e 2, pari al prodotto di *Fz*. Ricordando l'equazione che esprime il valore della curvatura 1/r assunta da un tratto di trave sollecitato da un momento flettente *Mf*, possiamo scrivere:

$$\frac{1}{r} = \frac{M_X}{E \cdot I_X} = \frac{F \cdot z}{E \cdot I_X} \qquad (1)$$

L'incurvamento del tronco 1-2 permette di individuare il centro di curvatura O. Gli incurvamenti prodotti per azione dei momenti flettenti agenti sui tronchi di trave compresi tra la sezione d'incastro A e la sezione 1, portano quest'ultima in posizione 1', per cui il tronco 1-2 assume la configurazione deformata 1'-2'. Condotte allora per 1ì e per 2' le perpendicolari all'asse deformato AB' della trave, esse dovranno incontrarsi in un punto O che è il centro di curvatura relativo al tratto 1'-2', e che deve trovarsi alla distanza *r* che si ricava dall'equazione (1)
La linea AB' prende il nome di **linea elastica**; rappresenta il luogo dei punti in cui, a causa della deformazione, si portano i corrispondenti punti dell'asse z del solido non ancora deformato.
I raggi r relativi ai tronchi di trave 1'-2' formano tra loro un angolo $\Delta\alpha$, che esprime la rotazione relativa tra le due sezioni terminali del tronco stesso di trave. Per calcolare il valore di $\Delta\alpha$ occorre considerare il triangolo O-1'-2' avente vertice O, altezza r e angolo al vertice $\Delta\alpha$, si ha:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta z}{r} \qquad (2)$$

E per la (1)

$$\Delta\alpha = \frac{M}{E \cdot I_X} \Delta z \qquad (3)$$

La (3) esprima la rotazione relativa tra le due sezioni generiche 1 e 2 della trave in funzione della sollecitazione esterna e delle caratteristiche elastiche (E – modulo di Young) e geometriche (I_x – momento quadratico di superficie).
Per calcolare la rotazione relativa alle sezioni terminali A e B basta notare che α_{AB} risulta uguale alla sommatoria delle infinite rotazioni relative $\Delta\alpha$ degli infiniti tronchi Δz in cui si può immaginare suddivisa la trave; si ha:

$$\alpha_{AB} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha \text{ per n} \rightarrow \infty \qquad (4)$$

per la (3) possiamo scrivere che

$$\alpha_{AB} = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_X}{E \cdot I_X} \Delta z \qquad (5)$$

I termini E ed I possono essere portati fuori dal segno di sommatoria perché costanti (ovviamente la trave deve essere per ipotesi omogenea e prismatica), riscrivendo la (5) come:

$$\alpha_{AB} = \frac{1}{E \cdot I} \sum_{i=1}^{n} M \cdot \Delta z \qquad (6)$$

La $\sum_{i=1}^{n} M \cdot \Delta z$ si può calcolare come area del diagramma dei momenti: ciascun termine $M \cdot \Delta z$ non è altro che il prodotto della lunghezza dz di un generico tronco di trave (come quello 1-2 considerato all'inizio di questa trattazione) per l'ordinata media M della parte di diagramma relativo al tronco stesso. Detto $M_A = F\ l$ il valore del momento all'incastro e osservato che l'area del diagramma di momento vale bh/2 = $l\ M_A / 2$, si avrà evidentemente:

$$\sum_{i=1}^{n} M \cdot \Delta z = M_A \frac{l}{2} \qquad (7)$$

Sostituendo la (7) nella (6) si ottiene il valore della rotazione di tutta la trave AB:

$$\alpha_{AB} = \frac{1}{E \cdot I} M_A \frac{l}{2} = \frac{1}{EI} Fl \frac{1}{2} = \boxed{\frac{F \cdot l^2}{2EI}} \qquad (8)$$

Riassumendo, la rotazione relativa tra due sezioni qualsiasi della trave è data dall'area del diagramma dei momenti sottostante al tratto di trave limitato dalle due sezioni stesse diviso il prodotto costante EI.

Si noti, ora, sempre dalla Fig.1, che la rotazione relativa delle sezioni terminali di ciascun tratto *Δz* di trave causa un incremento *Δf* all'abbassamento dell'estremo libero B, in cui è applicato il carico concentrato esterno F; condotte infatti le tangenti alla "linea elastica" nei punti 1' e 2 ', esse, essendo per costruzione perpendicolari ai raggi di curvatura r del tratto 1'-2', formeranno tra loro lo stesso angolo *Δα* che esprime la rotazione relativa tra le sezioni 1' e 2'. DI conseguenza sulla verticale per B, tali tangenti delimitano il segmento *Δf* che rappresenta appunto l'abbassamento elastico che l'estremo libero B della trave subisce per effetto della deformazione del tronco 1'-2'.
L'abbassamento totale , indicato con f_B nella Fig.1, prende il nome di **freccia elastica d'inflessione** della trave AB, e risulta essere la somma di tutti gli abbassamenti *Δf* determinati dalle deformazioni di tutti i tratti infinitesimi *Δz* della trave; si ha cioè

$$f_B = \sum \Delta f \qquad (9)$$

Poiché dal triangolo della Fig.1 avente per base *Δf* e per altezza la distanza z da B del tronco 1'-2' di trave, si ottiene:

$$f_B = z \cdot \Delta\alpha \qquad (10)$$

la (9) può riscriversi come:

$$f_B = \sum z \cdot \Delta\alpha = \sum z \cdot \frac{M}{EI} \Delta z = \frac{1}{EI} \sum M \cdot z \cdot \Delta z \qquad (11)$$

Si osservi ora (questa considerazione è fondamentale) che il termine *M z Δz* che compare nell'equazione (11) si può considerare come momento statico dell'area parziale *M Δz* , rispetto al vertice H dello stesso diagramma, ossia rispetto alla verticale passante per l'estremo libero della trave; <u>l'intera sommatoria può essere vista come la somma dei momenti statici di tutte le aree come *M Δz* in cui può pensarsi decomposto l'intero diagramma dei momenti</u>.
Per il teorema di Varignon, il momento statico di tutte le aree *M Δz* si può porre uguale al momento statico della risultante di tali aree, risultante che vale evidentemente l'area del diagramma dei momenti; poiché la suddetta risultante deve considerarsi applicata nel ba-

ricentro del diagramma stesso dei momenti ad una distanza pari a $\frac{2}{3}l$ dal punto H (essendo il diagramma triangolare, vedi momenti statici sul libro di 3MA).
Poiché l'intera area vale:

$$M_A \cdot \frac{l}{2} = F \cdot l \cdot \frac{l}{2} \qquad (12)$$

possiamo scrivere che:

$$\sum M \cdot z \cdot \Delta z = M_A \cdot \frac{l}{2} \frac{2}{3} l = F \cdot l \cdot \frac{l}{2} \frac{2}{3} l = \frac{F \cdot l^3}{3} \qquad (13)$$

Sostituendo questo valore nella (11) si ottiene infine:

$$\boxed{f_B = \frac{1}{EI} \sum M \cdot z \cdot \Delta z = \frac{F \cdot l^3}{3EI}} \qquad (14)$$

Riassumendo, per calcolare la freccia elastica relativa ad un tronco di trave, occorre calcolare il momento statico della parte di area del diagramma dei momenti flettenti sottostante al tronco considerato, rispetto alla verticale passante per una delle sezioni terminali del tronco stesso, precisamente rispetto a quella che risulta deviata angolarmente in seguito alla deformazione.

2 *Caso della trave appoggiata agli estremi.*

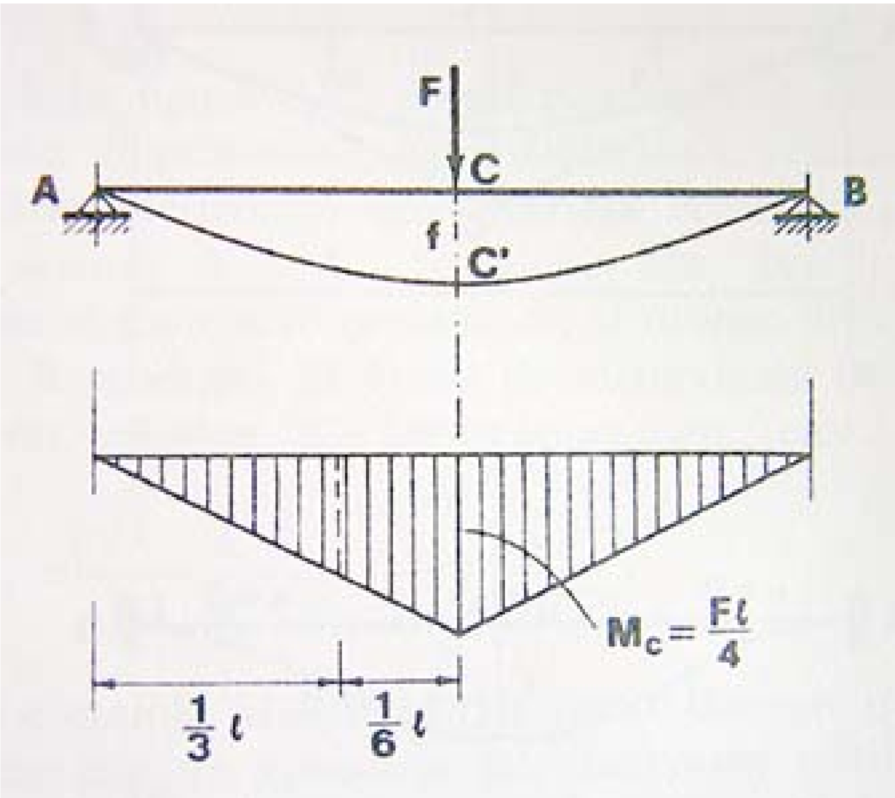

Fig.2

Nel caso di una trave appoggiata agli estremi e caricata in mezzeria (Fig.2) da una forza esterna concentrata, il calcolo delle rotazioni e della freccia d'inflessione, si effettuano seguendo le modalità sopra esaminate.
In questo caso la freccia massima si verifica nel punto di mezzo C della trave. La rotazione relativa α_{AC} della semi trave di sinistra si calcola dall'area del diagramma dei momenti compresi tra la sezioni A e C, divisa per il termine EI.

Essendo l'area triangolare, di altezza $M_C = F\frac{l}{4}$ e base $\frac{l}{2}$, si ha, per la (6)

$$\alpha_{AC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{F\cdot l}{4}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{E\cdot I} = \frac{Fl^2}{16EI} \qquad (15)$$

Il valore della freccia f_C lo si ottiene dall'equazione (11), valutando il momento statico dell'area triangolare di Fig.2 rispetto alla verticale passante per A e non per la mezzeria della trave, dove la linea elastica ha tangente orizzontale. Considerando che la distanza del baricentro dell'area considerata dalla verticale suddetta vale $\frac{1}{3}l$, si ha che il momento statico vale:

$$\sum M\cdot z\cdot\Delta z = \frac{1}{2}\cdot\frac{F\cdot l}{4}\cdot\frac{l}{2}\cdot\frac{1}{3}l = \frac{Fl^3}{48} \qquad (16)$$

Sostituendo il valore del momento statico del diagramma nella (11) si ottiene il valore di f_C

$$\boxed{f_C = \frac{1}{EI}\sum M\cdot z\cdot\Delta z = \frac{F\cdot l^3}{48EI}} \qquad (17)$$